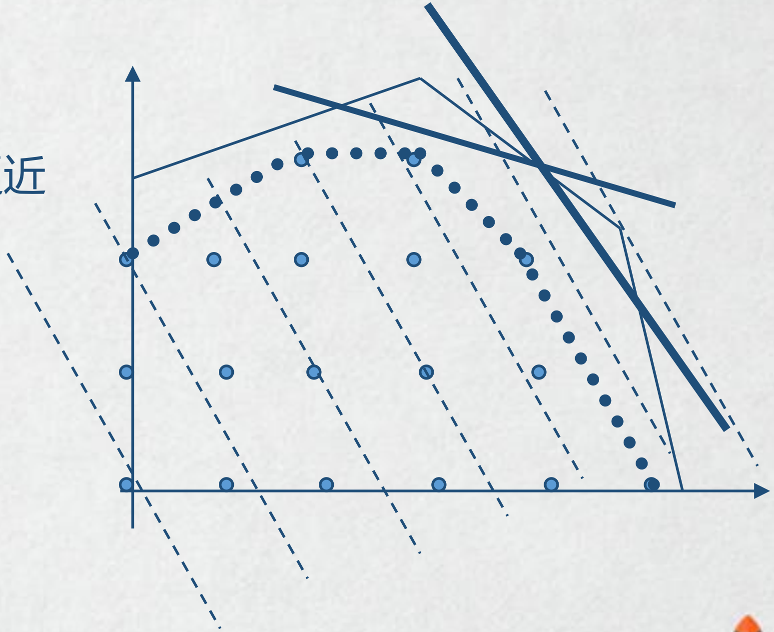
割平面解法

算法思想

- 由松弛问题的可行域向整数规划的可行域逼近
- 方法—利用超平面切除
- 要求

  1.整数解保留

  2.松弛问题最优值减小



Gomory定理

在松弛问题的最优单纯形表中，假如有一常数项 $\bar{b}_{i_0}$ 不是整数，且对应的方程为：

$$x_{i_0} + \sum \bar{a}_{i_0,j} x_j = \bar{b}_{i_0}$$

分解 $\bar{a}_{i_0,j}$ 和 $\bar{b}_{i_0}$ 成整数与非负真分数之和：

$$\bar{a}_{i_0,j} = N_{i_0,j} + f_{i_0 j}$$

$$\bar{b}_{i_0} = N_{i_0} + f_{i_0}$$

$$x_{i_0} + \sum \bar{a}_{i_0,j} x_j = \bar{b}_{i_0}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{i_0} + \sum (N_{i_0,j} + f_{i_0,j}) x_j = N_{i_0} + f_{i_0}$$

$$\Downarrow$$

$$x_{i_0} + \sum N_{i_0,j} x_j - N_{i_0} = f_{i_0} - \sum f_{i_0,j} x_j$$

则

$$f_{i_0} - \sum f_{i_0,j} x_j \le 0$$

为割平面方程

（一）、割平面解法计算步骤：

- 1、用单纯形法求解(IP)对应的松弛问题(LP)：
  - ⑴.若(LP)没有可行解，则(IP)也没有可行解，停止计算。
  - ⑵.若(LP)有最优解，并符合(IP)的整数条件，则(LP)的最优解即为(IP)的最优解，停止计算。
  - ⑶.若(LP)有最优解，但不符合(IP)的整数条件，转入下一步。

$$x_{i_0} + \sum N_{i_0,j} x_j - N_{i_0} = f_{i_0} - \sum f_{i_0,j} x_j$$

2、从(LP)的最优解中，任选一个不为整数的分量x_r,,将最优单纯形表中该行的系数 a'_{rj} 和 b'_r 分解为整数部分和非负的真分数部分之和并且移项.把整数及带有整数系数的变量移方程左边,分数及带有分数系数的变量移方程右边.，按下式作割平面方程：

$$\underbrace{f_r}_{b'_r\text{的分数部分}} - \sum_{j=m+1}^{n} \underbrace{f_{rj}}_{a'_{rj}\text{的分数部分}} x_j \le 0$$

3、将所得的割平面方程作为一个新的约束条件置于最优单纯形表中

（同时增加一个单位列向量），用对偶单纯形法求出新的最优解，返回1。

整数规划问题模型的标准化:

- 把不等式划为等式
- 将非整数系数全部化为整数,出于割平面的需要.

例如: $\frac{1}{3}x_1 + \frac{2}{5}x_2 \leq 3$

$$5x_1 + 6x_2 \leq 45$$

加入松弛变量变为：

$$5x_1 + 6x_2 + x_3 = 45$$

目的:使松弛变量x_3也是整数

例：用割平面法求解整数规划问题

$$\max Z = x_2$$

$$\begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \le 6 \\ -3x_1 + 2x_2 \le 0 \\ x_1, x_2 \ge 0 \text{且为整数} \end{cases}$$

解：增加松弛变量x_3和x_4 ，得到(LP)的初始单纯形表和最优单纯形表：

C_j			0	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_3	6	3	2	1	0
0	x_4	0	-3	2	0	1
$-Z$		0	0	1	0	0

C_j			0	1	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4
0	x_1	1	1	0	1/6	-1/6
1	x_2	3/2	0	1	1/4	1/4
$-Z$		-3/2	0	0	-1/4	-1/4

此题的最优解为：X^* (1 , 3/2)　Z = 3/2　但不是整数最优解，引入割平面。以x_2为源行生成割平面，由于 1/4=0+1/4, 3/2=1+1/2，我们已将所需要的数分解为整数和分数，所以，生成割平面的条件为:

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{2}$$

$$x_2 + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 = 1 + \frac{1}{2}$$

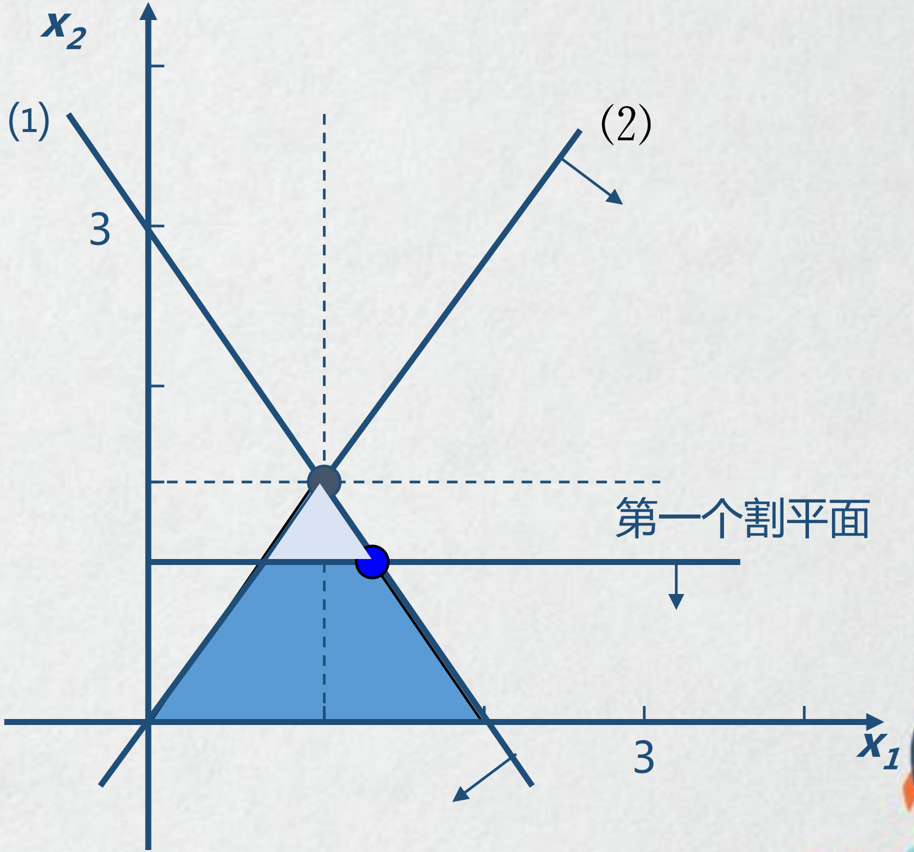
$$x_2 - 1 = \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4)$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} - (\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4) \leq 0 \longrightarrow \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2}$$

将 $x_3=6-3x_1-2x_2$， $x_4=3x_1-2x_2$,带入

$$\frac{1}{4}x_3+\frac{1}{4}x_4\geq\frac{1}{2}$$

得到等价的割平面条件： $x_2\leq 1$见下图。



现将生成的割平面条件加入松弛变量，然后加到表中：

$$\frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_4 \geq \frac{1}{2} \longrightarrow -x_3 - x_4 + s_1 = -2$$

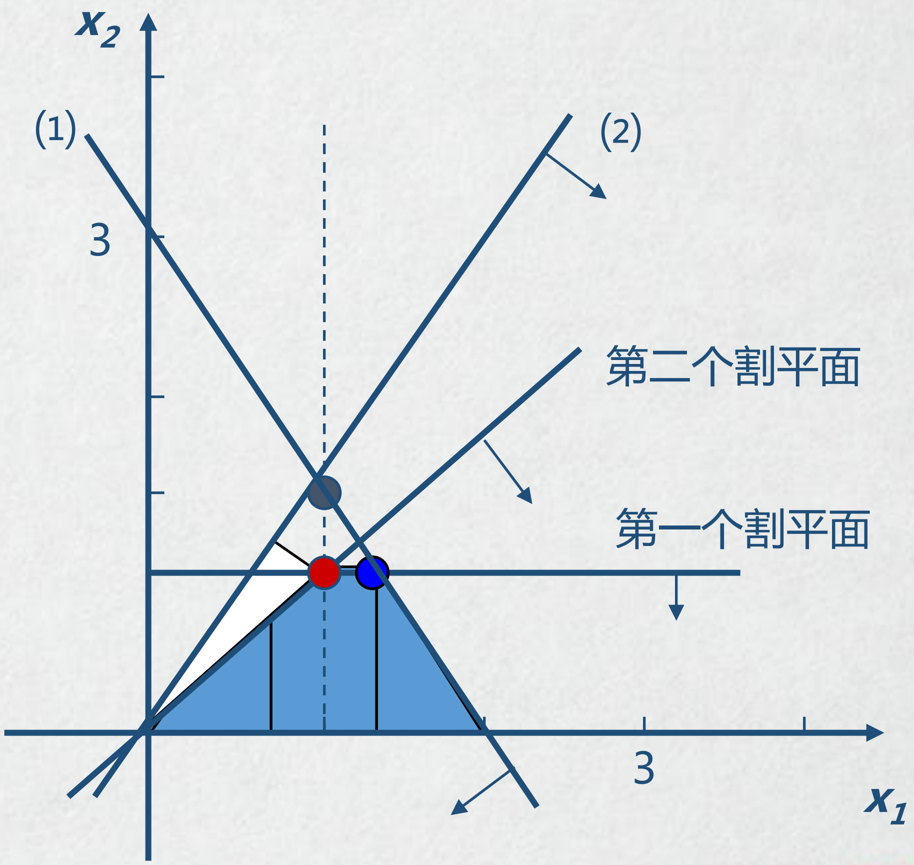
C_j			0	1	0	0	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
0	x_1	1	1	0	1/6	-1/6	0
1	x_2	3/2	0	1	1/4	1/4	0
0	s_1	-2	0	0	-1	-1	1
$-Z$		-3/2	0	0	-1/4	-1/4	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1
0	x_1	2/3	1	0	0	-1/3	2/3
1	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	2	0	0	1	1	-4
$-Z$		-1	0	0	0	0	-1

此时，$X^1 = (2/3, 1)$，Z=1,仍不是整数解。继续以x_1为源行生成割平面，

其条件为：$\frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}s_1 \geq \frac{2}{3}$

用上表的约束解出x_4和s_1，将它们带入上式得到等价的割平面条件：$x_1 \geq x_2$，

见图：



将生成的割平面条件加入松弛变量，然后加到表中：

$$\frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}s_1 \geq \frac{2}{3} \Rightarrow -2x_4 - 2s_1 + s_2 = -2$$

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
0	x_1	2/3	1	0	0	-1/3	2/3	0
1	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	2	0	0	1	1	-4	0
0	s_2	-2	0	0	0	-2	-2	1
$-Z$		-1	0	0	0	0	-1	0
C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
0	x_1	0	1	0	0	-1	0	1
1	x_2	0	0	1	0	-1	0	3/2
0	x_3	6	0	0	1	5	0	-6
0	s_1	1	0	0	0	1	1	-3/2
$-Z$		0	0	0	0	1	0	-3/2

C_B	X_B	b	x_1	x_2	x_3	x_4	s_1	s_2
0	x_1	1	1	0	0	0	1	-1/2
1	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	1	0	0	1	0	-5	3/2
0	x_4	1	0	0	0	1	1	-3/2
$-Z$		-1	0	0	0	0	-1	0

至此得到最优表，其最优解为 $X^* = (1, 1)$，Z = 1, 这也是原问题的最优解。

有以上解题过程可见，表中含有分数元素且算法过程中始终保持对偶可行性，因此，这个算法也称为分数对偶割平面算法。