



西安科技大学

《信号与系统分析》



2-1 LTI连续系统微分方程的经典解

主讲人：刘凌志

- (一) LTI连续系统描述
- (二) 微分方程的经典解：其次解+特解
- (三) 总结



(一) LTI连续系统的描述

激励为 $f(t)$ ，其响应为 $y(t)$ ，则描述线性时不变连续系统的激励 $f(t)$ 与响应 $y(t)$ 之间关系的数学模型是： n 阶常系数线性微分方程

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \dots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) \\ = b_m f^{(m)}(t) + b_{m-1}f^{(m-1)}(t) + \dots + b_1f(t) \end{aligned} \quad (1)$$

$$\text{简写为: } \sum_{j=0}^n a_j y^{(j)}(t) = \sum_{i=0}^m b_i f^{(i)}(t) \quad (2)$$

式(2)中 $a_j (j = 0, 1, \dots, n)$ 和 $b_i (i = 0, 1, \dots, m)$ 均为常数，且 $a_n = 1$ 。



(二)、LTI连续系统的经典解：全解 $y(t)$ =其次解 $y_h(t)$ +特解 $y_p(t)$

1. 齐次解 $y_h(t)$ ：齐次解满足齐次微分方程为

$$y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1y^{(1)}(t) + a_0y(t) = 0 \quad (3)$$

式(3)的特征方程为：

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0 \quad (4)$$

(1) 特征根 λ 均为单实根。如果 n 个特征实根都互不相同(即无重根)，则微分方程的齐次解为：

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^n C_i e^{\lambda_i t} \quad (5) \quad \text{其中 } C_i \text{ 为求出全解后由初始值确定的待定系数；}$$



(2) 特征根 λ 有 r 重实根。若 λ_1 是特征方程的 r 重实根，即有 $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=\dots=\lambda_r$ ，而其余 $(n-r)$ 个根 $\lambda_{r+1}, \lambda_{r+2}, \dots, \lambda_n$ 都是单根，则微分方程的齐次解为：

$$y_h(t) = \sum_{i=1}^r c_{r-i} t^{r-i} e^{\lambda_1 t} + \sum_{i=r+1}^n c_i e^{\lambda_i t} \quad (6) \quad C_{r-i} \text{ 和 } C_i \text{ 为待定系数}$$

(3) 特征根 λ 有一对共轭复根。设 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ ，则微分方程的齐次解为：

$$y_h(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (7)$$



(4) 特征根有 r 重共轭复根。设共有 r 重 $\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$ 的复根，则微分方程的齐次解为：

$$y_h(t) = c_1 e^{\alpha t} \cos \beta t + c_2 t e^{\alpha t} \cos \beta t + \cdots + c_r t^{r-1} e^{\alpha t} \cos \beta t \\ + d_1 e^{\alpha t} \sin \beta t + d_2 t e^{\alpha t} \sin \beta t + \cdots + d_r t^{r-1} e^{\alpha t} \sin \beta t \quad (8)$$

注意：四种情况的待定系数在求得全解后，由初始值确定。

2. 特解 $y_p(t)$ ：

特解 $y_p(t)$ 的函数形式与激励函数的形式有关。表一列出了几种类型的激励函数及其所对应的特解 $y_p(t)$ 。选定特解后，将它代入到原微分方程，求出其待定系数 P_i ，就可得出特解。



表1 不同激励所对应的特解

激励 $f(t)$	特解 $y_p(t)$
t^m	$P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0$ 所有的特征根均不等于 0; $t^r [P_m t^m + P_{m-1} t^{m-1} + \cdots + P_1 t + P_0]$ 有 r 重等于 0 的特征根
$e^{\alpha t}$	$P e^{\alpha t}$ α 不等于特征根; $(P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$ α 等于特征单根; $(P_r t^r + P_{r-1} t^{r-1} + \cdots + P_1 t + P_0) e^{\alpha t}$ α 等于 r 重特征根
$\cos(\beta t)$ 或 $\sin(\beta t)$	$P \cos(\beta t) + Q \sin(\beta t)$ 所有的特征根均不等于 $\pm j\beta$ 或 $A \cos(\beta t - \theta)$, 其中 $A e^{j\theta} = P + jQ$



3. 完全解 $y(t)$:

$$y(t) = y_p(t) + y_h(t) \quad (9)$$

求出齐次解 $y_h(t)$ 和特解 $y_p(t)$ 之后，再由**初始值** $y^{(j)}(0_+)$ 确定解中所有待定系数。

齐次解的函数形式仅与系统本身的特性有关，而与激励 $f(t)$ 的函数形式无关，称为系统的**固有响应**或**自由响应**；

特解的函数形式由激励确定，称为**强迫响应**。

总结： 经典法求LTI连续系统微分方程，其经典解为：

$$\text{全解} = \begin{cases} \text{齐次解 } y_h(t) (\text{自由响应}) \\ \text{特解 } y_p(t) (\text{强迫响应}) \end{cases}$$



注意

初始值是指 $t=0_+$ 时刻的值，即 $y^{(j)}(0_+)$ ，简称 0_+ 值。

在 $t=0_-$ 时，激励尚未接入，因而响应及各阶导数在该时刻的值 $y^{(j)}(0_-)$ ，反映了系统的历史情况而与激励无关，它们为 $t>0$ 时的响应 $y(t)$ 提供了历史的全部信息，称这些在 $t=0_-$ 时刻的值为初始状态，简称 0_- 值。

一般采用经典解求解LTI微分方程时，已知的是初始状态，即 0_- 值，但待定系数是由 0_+ 的值确定的。

因此，涉及一个由 0_- 求 0_+ 的问题，即由 $y^{(j)}(0_-)$ 求 $y^{(j)}(0_+)$ 。



4.由 0_- 求 0_+ 的问题

由 0_- 值求得 0_+ 值的一般步骤：（以二阶系统为例）

（1）将输入 $f(t)$ 代入微分方程。

（2）令 $y''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$ ，对 $y''(t)$ 从 $-\infty$ 到 t 进行积分，逐次求得 $y'(t)$ 和 $y(t)$ 。

（3）将 $y''(t)$ 、 $y'(t)$ 和 $y(t)$ 代入原微分方程，根据方程等号两端的奇异函数系数相等原理，从而得到 $y''(t)$ 、 $y'(t)$ 和 $y(t)$ 中的各待定系数 a 、 b 和 c 。



(4) 分别对 $y'(t)$ 和 $y''(t)$ 表达式等号两端从 0^- 到 0^+ 进行积分, 依次求得各 0^+ 值 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 。

5 举例说明

例1 描述某LTI系统的微分方程为:

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = f''(t) + 2f(t)$$

已知: $y(0_-) = 1$, $y'(0_-) = -1$, $f(t) = \delta(t)$, 求 $y(0_+)$ 和 $y'(0_+)$ 及系统全解。



西安科技大学



解：将输入 $f(t) = \delta(t)$ 代入微分方程，得

$$y''(t) + 2y'(t) + y(t) = \delta''(t) + 2\delta(t)$$

令 $y''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$

得 $y'(t) = a\delta'(t) + b\delta(t) + r_1(t)$

$$y(t) = a\delta(t) + r_2(t)$$

将 $y''(t)$ 、 $y'(t)$ 和 $y(t)$ 代入到原微分方程式中，并整理成：

$$\begin{aligned} & a\delta''(t) + (2a + b)\delta'(t) + (a + 2b + c)\delta(t) + [r_0(t) + 2r_1(t) + r_2(t)] \\ & = \delta''(t) + 2\delta(t) \end{aligned}$$



上式中等号两端的冲激函数及其各阶导数的系数应分别相等，故得

$$a = 1$$

$$2a + b = 0$$

$$a + 2b + c = 2$$

可解得： $a = 1$ ， $b = -2$ ， $c = 5$ 。将 $a = 1$ ， $b = -2$ 入式 $y'(t)$ 的表达式中，并对等号两端从 0_- 到 0_+ 进行积分，有：

$$y(0_+) - y(0_-) = \int_{0_-}^{0_+} \delta'(t) dt - \int_{0_-}^{0_+} 2\delta(t) dt + \int_{0_-}^{0_+} r_1(t) dt$$



可得 $y(0_+) - y(0_-) = -2$, 得出: $y(0_+) = -1$

同理: 将 $a=1$, $b=-2$, $c=5$ 代入式

$$y''(t) = a\delta''(t) + b\delta'(t) + c\delta(t) + r_0(t)$$

中, 并对等号两端从 0_- 到 0_+ 进行积分, 可得:

$$y'(0_+) - y'(0_-) = 5$$

得出: $y'(0_+) = y'(0_-) + 5 = 4$



另由微分方程可知，特征方程为： $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = 0$ ，得二重实根 $\lambda_{1,2} = -1$

所以齐次解为 $y_h(t) = C_1 t e^{-t} + C_2 e^{-t}$ ，由于激励信号为冲激函数，作用在系统上时只改变系统的初始状态，而当 $t > 0$ 时，特解为零。

故
$$\begin{cases} y(t) = C_1 t e^{-t} + C_2 e^{-t} \\ y'(t) = -C_1 t e^{-t} + (C_1 - C_2) e^{-t} \end{cases} \quad \text{令 } t=0, \text{ 把 } y(0_+) = -1 \text{ 和 } y'(0_+) = 4$$

代入，得 $C_1 = 3$ 和 $C_2 = -1$

所以 $y(t) = (3 t e^{-t} - e^{-t}) \varepsilon(t)$



(三) 总结

经典法从时域解LTI连续系统微分方程，其全解为齐次解（自由响应）和特解（强迫响应）。

也可从响应的角度同样也可以分为零输入响应 $y_{zi}(t)$ 和零状态响应 $y_{zs}(t)$ 。

$$\text{全解} \left\{ \begin{array}{l} \text{经典解} \left\{ \begin{array}{l} \text{齐次解 } y_h(t) \text{ (自由响应)} \\ \text{特解 } y_p(t) \text{ (强迫响应)} \end{array} \right. \\ \\ \text{响应} \left\{ \begin{array}{l} \text{零输入响应 } y_{zi}(t) \\ \text{零状态响应 } y_{zs}(t) \end{array} \right. \end{array} \right.$$