



第五节 趋势型序列的预测

一、线性趋势预测

二、非线性趋势预测



趋势序列及其预测方法

- **趋势：**持续向上或持续下降的状态或规律
 - 有线性趋势和非线性趋势
 - 主要分析方法

线性趋势
预测

非线性趋
势预测

自回归模
型预测



一、线性趋势预测

➤ 线性趋势预测

- 现象随着时间的推移而呈现出稳定增长或下降的线性变化规律
- 由影响时间序列的基本因素作用形成
- 时间序列的成分之一
- 预测方法：线性模型法



一、线性趋势预测

- 线性方程的形式为

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t$$

- \hat{Y}_t —时间序列的预测值
- t —时间标号
- b_0 —趋势线在 Y 轴上的截距
- b_1 —趋势线的斜率，表示时间 t 变动一个单位时观察值的平均变动数量



一、线性趋势预测

- 根据最小二乘法得到求解 b_0 和 b_1 的标准方程为

$$\begin{cases} \sum Y = nb_0 + b_1 \sum t \\ \sum tY = b_0 \sum t + b_1 \sum t^2 \end{cases} \quad \text{解得} \quad \begin{cases} b_1 = \frac{n \sum tY - \sum t \sum Y}{n \sum t^2 - (\sum t)^2} \\ b_0 = \bar{Y} - b_1 \bar{t} \end{cases}$$

- 预测误差可用估计标准误差来衡量

$$s_Y = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2}{n - m}}$$

m 为趋势方程中待确定的未知常数的个数



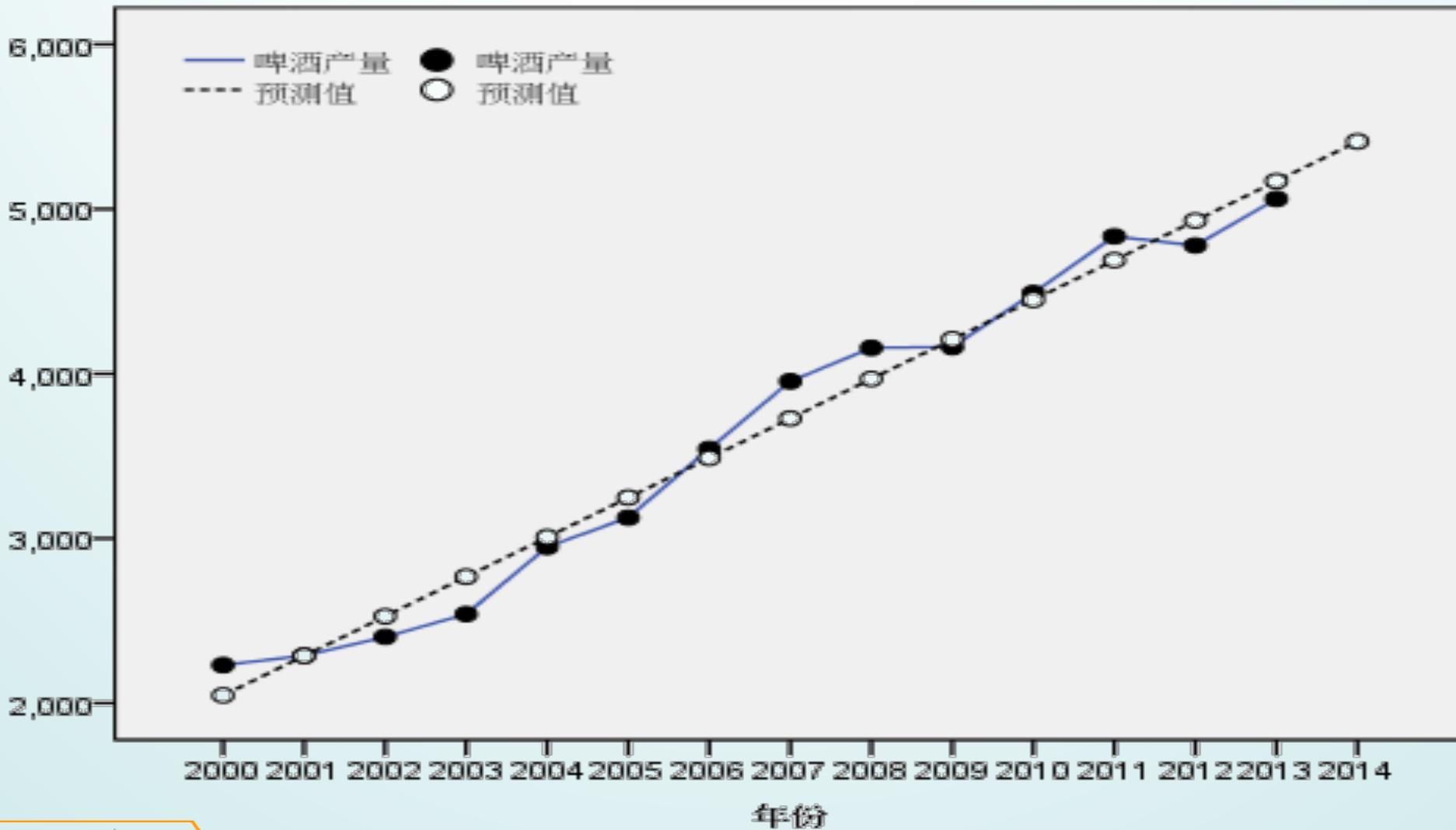
一、线性趋势预测

【例】根据啤酒产量数据，根据最小二乘法确定直线趋势方程，计算出各期的预测值和预测误差，预测2014年的啤酒产量，并将原序列和各期的预测值序列绘制成图形进行比较

	年份	时间代码	啤酒产量	预测值	残差
1	2000	1	2231.3	2047.35	183.95
2	2001	2	2288.9	2287.53	1.37
3	2002	3	2402.7	2527.72	-125.02
4	2003	4	2540.5	2767.90	-227.40
5	2004	5	2948.6	3008.09	-59.49
6	2005	6	3126.1	3248.27	-122.17
7	2006	7	3543.6	3488.46	55.14
8	2007	8	3954.1	3728.64	225.46
9	2008	9	4156.9	3968.83	188.07
10	2009	10	4162.2	4209.01	-46.81
11	2010	11	4490.2	4449.20	41.00
12	2011	12	4834.5	4689.38	145.12
13	2012	13	4778.6	4929.57	-150.97
14	2013	14	5061.5	5169.75	-108.25
15	2014	15	.	5409.94	.

$$\hat{Y}_t = 1807.16 + 240.185t$$

一、线性趋势预测





二、非线性趋势预测

常用的趋势曲线

指数曲线

多阶曲线



二、非线性趋势预测

➤ 指数曲线

- 时间序列以几何级数递增或递减
- 一般形式为

$$\hat{Y}_t = b_0 b_1^t$$

- b_0, b_1 为待定系数
- 若 $b_1 > 1$ ，增长率随着时间 t 的增加而增加
- 若 $b_1 < 1$ ，增长率随着时间 t 的增加而降低
- 若 $b_0 > 0, b_1 < 1$ ，趋势值逐渐降低到以0为极限



二、非线性趋势预测

- 采取“线性化”手段将其化为对数直线形式
- 根据最小二乘法，得到求解 $\lg b_0$ 、 $\lg b_1$ 的标准方程为

$$\begin{cases} \sum \lg Y = n \lg b_0 + \lg b_1 \sum t \\ \sum t \lg Y = \lg b_0 \sum t + \lg b_1 \sum t^2 \end{cases}$$

- 求出 $\lg b_0$ 和 $\lg b_1$ 后，再取其反对数，即得算术形式的 b_0 和 b_1



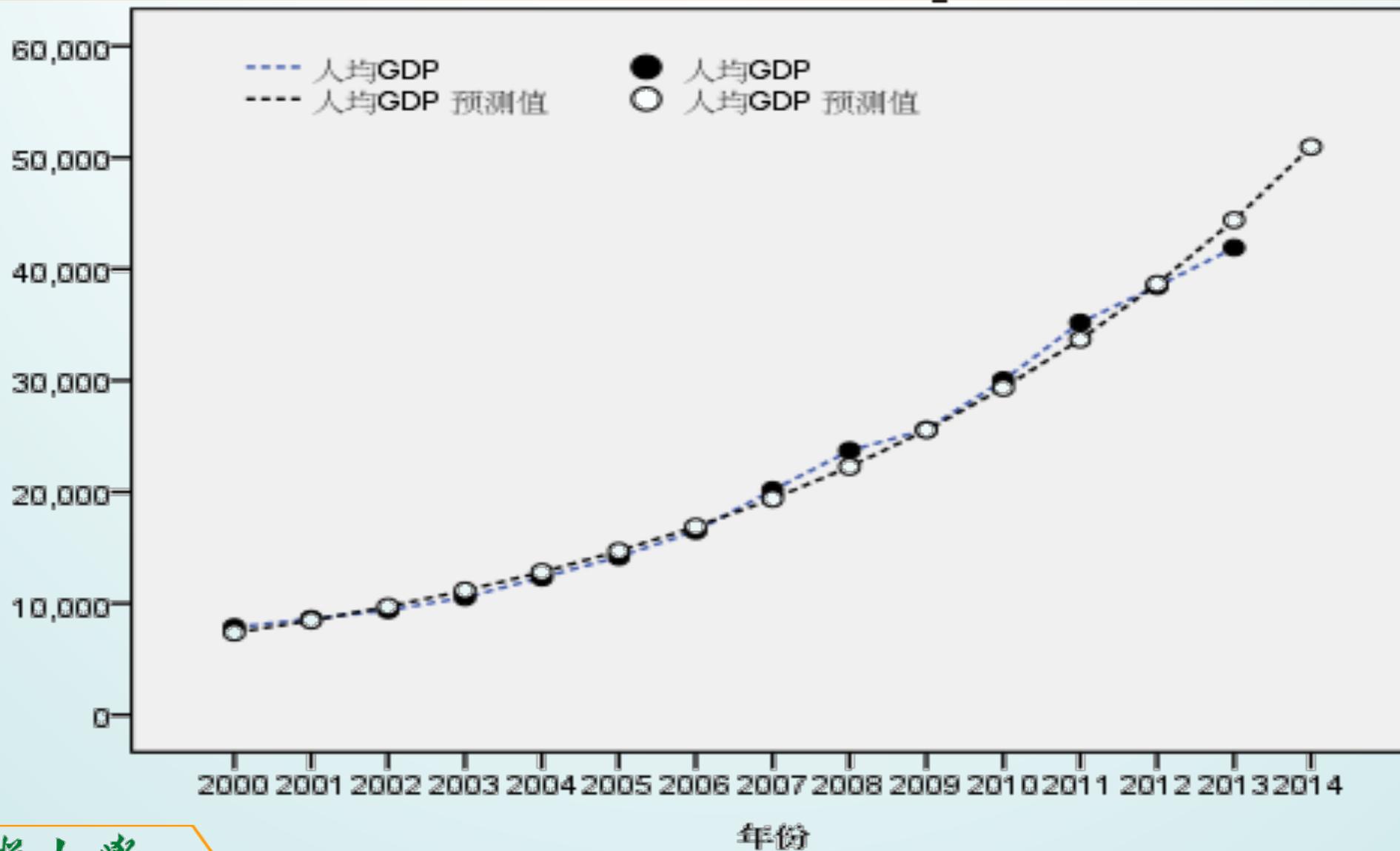
二、非线性趋势预测

【例】 根据表13—1中的人均GDP数据，确定指数曲线方程，计算出各期的预测值和预测误差，预测2014年的人均GDP，并将原序列和各期的预测值序列绘制成图形进行比较

	年份	时间代码	人均GDP	预测值	残差
1	2000	1	7857.7	7377.37	480.33
2	2001	2	8621.7	8469.45	152.25
3	2002	3	9398.1	9723.20	-325.10
4	2003	4	10542.0	11162.55	-620.55
5	2004	5	12335.6	12814.96	-479.36
6	2005	6	14185.4	14711.98	-526.58
7	2006	7	16499.7	16889.83	-390.13
8	2007	8	20169.5	19390.06	779.44
9	2008	9	23707.7	22260.41	1447.29
10	2009	10	25607.5	25555.67	51.83
11	2010	11	30015.0	29338.72	676.28
12	2011	12	35197.8	33681.79	1516.01
13	2012	13	38459.5	38667.78	-208.28
14	2013	14	41907.6	44391.85	-2484.25
15	2014	15	.	50963.26	.

$$\hat{Y}_t = 3426.097 + 1.148^t$$

二、非线性趋势预测





二、非线性趋势预测

➤ 指数曲线与直线的比较

- 比一般的趋势直线有着更广泛的应用
- 可以反应现象的相对发展变化程度
 - ✓ 上例中， $b_1=1.148$ 表示2000—2013年人均GDP的年平均增长率为14.8%
- 不同序列的指数曲线可以进行比较
 - ✓ 比较分析相对增长程度



二、非线性趋势预测

➤ 多阶曲线

- 有些现象的变化形态比较复杂，它们不是按照某种固定的形态变化，而是有升有降，在变化过程中可能有几个拐点。这时就需要拟合多项式函数
- 当只有一个拐点时，可以拟合二阶曲线，即抛物线；当有两个拐点时，需要拟合三阶曲线；当有k-1个拐点时，需要拟合k阶曲线
- k阶曲线函数的一般形式为

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1t + b_2t^2 + \cdots + b_k t^k$$

- 线性化后，根据最小二乘法求 $b_0, b_1, b_2, b_3, \dots, b_k$



二、非线性趋势预测

【例】 根据煤炭占能源消费的比重数据，拟合适当的趋势曲线，计算出各期的预测值和预测误差，预测2014年的煤炭占能源消费的比重，并将原序列和各期的预测值序列绘制成图形进行比较

	年份	时间代码	煤炭占能源消费总量的比重	预测值	残差
1	2000	1	69.2	67.81	1.39
2	2001	2	68.3	68.70	-.40
3	2002	3	68.0	69.42	-1.42
4	2003	4	69.8	69.96	-.16
5	2004	5	69.5	70.33	-.83
6	2005	6	70.8	70.53	.27
7	2006	7	71.1	70.56	.54
8	2007	8	71.1	70.42	.68
9	2008	9	70.3	70.10	.20
10	2009	10	70.4	69.61	.79
11	2010	11	68.0	68.94	-.94
12	2011	12	68.4	68.11	.29
13	2012	13	66.6	67.10	-.50
14	2013	14	66.0	65.92	.08
15	2014	15	.	64.56	.

$$\hat{Y}_t = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 \quad \hat{Y}_t = 66.747 + 1.149t - 0.086t^2$$

二、非线性趋势预测

